

QUESTION 1 (Q1) – Déformation d'une barre fixée**(8 points)**

Une barre de section carrée, de côté a , est fixée sur un mur en A. Une cavité de section carrée, de côté b et de longueur L , est présente dans le segment BC. La barre est soumise à des forces F_1 en B, F_2 en C et F_3 en D selon l'axe des x , comme montré en **Figure 1**. Les paramètres du système sont les suivants : $a = 10 \text{ cm}$, $L = 2 \text{ m}$, $F_1 = 1 \text{ kN}$ et $F_3 = 4 \text{ kN}$.

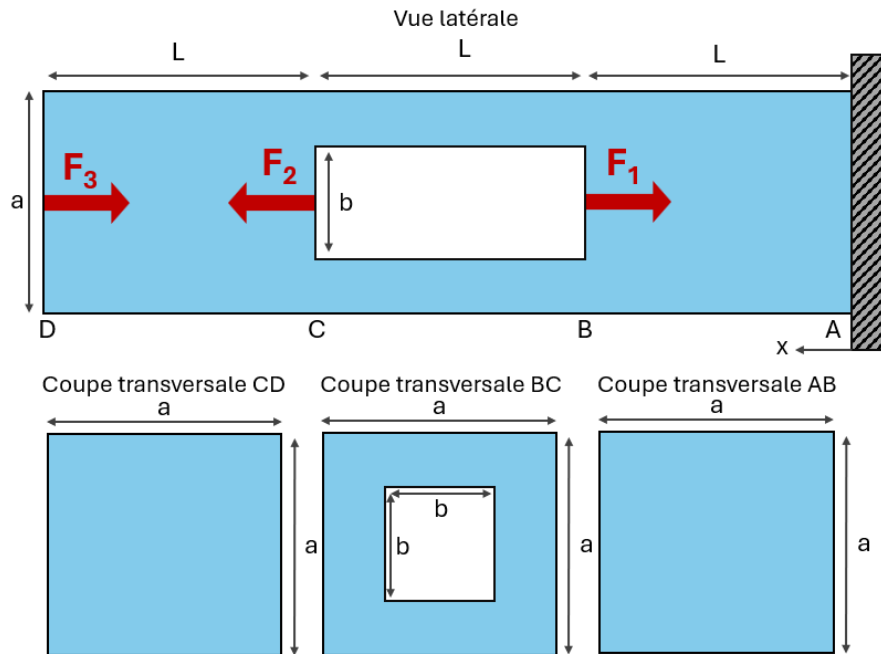


Figure 1 : Une barre de section carrée avec cavité soumise à des forces F_1 en B, F_2 en C et F_3 en D. Vue latérale et coupe transversale (dessin pas à l'échelle).

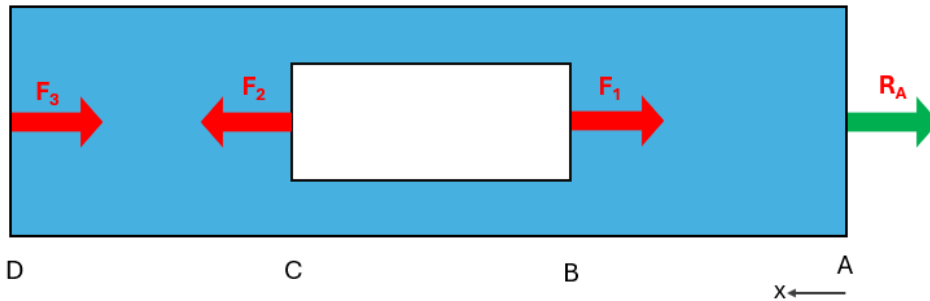
- [1 point] Dessiner le diagramme des corps libres et donner l'équation d'équilibre.
- [2 points] Dessiner les diagrammes des forces internes pour chacun des segments à l'équilibre en utilisant la méthode des sections et donner les expressions analytiques de N_{AB} , N_{BC} et N_{CD} en fonction des forces externes et de réaction.
- [1 point] Exprimer la contrainte dans chacun des segments en fonction des dimensions du système et des forces externes.
- [2 points] On considère que la contrainte est la même dans tous les segments de la barre. Pour cette condition, donner les valeurs numériques de F_2 et b .
- [2 points] Lorsque la contrainte est la même dans toute la barre, l'énergie de déformation relative est-elle la même dans tous les segments ? Justifier votre réponse.

QUESTION 1 (Q1) – Solution

(8 points)

a) [1 point] : Dessiner le diagramme des corps libres et donner l'équation d'équilibre.

$$F_2 - R_A - F_1 - F_3 = 0 \rightarrow F_2 - F_1 - F_3 = R_A$$



b) [2 points] : Dessiner les diagrammes des forces internes pour chacun des segments à l'équilibre en utilisant la méthode des sections et donner les expressions analytiques de N_{AB} , N_{BC} et N_{CD} en fonction des forces externes et de réaction.

<p>Three free body diagrams are shown, one for each segment. The top diagram is for segment AB, showing a blue bar with a red arrow R_A pointing right at the right end and a blue arrow N_{AB} pointing left at the left end. The middle diagram is for segment BC, showing a blue bar with a red arrow F_1 pointing right at the left end, a blue arrow N_{BC} pointing left at the left end, and a red arrow R_A pointing right at the right end. The bottom diagram is for segment CD, showing a blue bar with a red arrow F_3 pointing right at the left end, a red arrow F_1 pointing right at the right end, and a blue arrow N_{CD} pointing left at the left end. A coordinate system x is shown below point A, pointing to the left.</p>	$N_{AB} = R_A = F_2 - F_1 - F_3$ $N_{BC} = F_1 + R_A$ $N_{CD} = R_A + F_1 - F_2$ $N_{CD} = F_2 - F_1 - F_3 + F_1 - F_2 = -F_3$
<p>Or</p> <p>Three free body diagrams are shown, one for each segment. The top diagram is for segment CD, showing a blue bar with a red arrow F_3 pointing right at the left end and a blue arrow N_{CD} pointing right at the right end. The middle diagram is for segment BC, showing a blue bar with a red arrow F_2 pointing right at the left end, a red arrow F_1 pointing left at the right end, and a blue arrow N_{BC} pointing right at the right end. The bottom diagram is for segment AB, showing a blue bar with a red arrow F_2 pointing right at the left end, a red arrow F_1 pointing right at the right end, and a blue arrow N_{AB} pointing right at the right end. A coordinate system x is shown below point A, pointing to the left.</p>	$N_{CD} = -F_3$ $N_{BC} = F_2 - F_3 = F_1 + R_A$ $N_{AB} = -F_1 + F_2 - F_3 = R_A$

c) [1 point] : Exprimer la contrainte dans chacun des segments en fonction des dimensions du système et des forces externes.

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{AB}} = \frac{R_A}{a^2} = \frac{F_2 - F_1 - F_3}{a^2}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = \frac{F_1 + R_A}{a^2 - b^2} = \frac{F_2 - F_3}{a^2 - b^2}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A_{CD}} = \frac{-F_3}{a^2}$$

d) [2 points] : On souhaite que la contrainte soit la même dans tous les segments de la barre. Pour cette condition, donner la valeur numérique de F_2 et celle de la dimension b .

With $a = 10 \text{ cm}$, $L = 2 \text{ m}$, $F_1 = 1 \text{ kN}$ et $F_3 = 4 \text{ kN}$

Method 1 :

$$\sigma_{AB} = \frac{F_2 - F_1 - F_3}{a^2}; \sigma_{BC} = \frac{F_2 - F_3}{a^2 - b^2} \text{ and } \sigma_{CD} = \frac{-F_3}{a^2}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{-4000}{(10 * 10^{-2})^2} = -0.4 \text{ MPa}$$

We then have that

$$\sigma_{AB} = \sigma_{CD} = \frac{F_2 - F_1 - F_3}{a^2} = -0,4 \text{ MPa}$$

And we get $F_2 = -400000 * (10 * 10^{-2})^2 + F_1 + F_3 = -4000 + 1000 + 4000 = 1 \text{ kN}$

And finally using $\sigma_{BC} = \frac{F_2 - F_3}{a^2 - b^2} = -400000$ and $F_2 = 1 \text{ kN}$,

We have $\frac{1000 - 4000}{(10 * 10^{-2})^2 - b^2} = -400000$,

$$1000 - 4000 = -400000 * (10 * 10^{-2})^2 + b^2 * (-400000)$$

$$b^2 = -\frac{3000 + 4000}{-400000} = \frac{1}{400} \text{ m}$$

We get

$$b = 0.05 \text{ m}$$

Method 2 :

- $\sigma_{AB} = \sigma_{BC} \Leftrightarrow \frac{F_2 - F_1 - F_3}{a^2} = \frac{F_2 - F_3}{a^2 - b^2}$
 $\Leftrightarrow a^2(F_2 - F_3) = (a^2 - b^2)(F_2 - F_1 - F_3)$
 $\Leftrightarrow -a^2F_1 + b^2(-F_2 + F_1 + F_3) = 0$
 $\Leftrightarrow b^2 = a^2 \left(\frac{F_1}{-F_2 + F_1 + F_3} \right)$
$$b = a \sqrt{\frac{F_1}{-F_2 + F_1 + F_3}} = 10 * 10^{-2} * \sqrt{\frac{1 \text{ kN}}{-F_2 + 1 \text{ kN} + 4 \text{ kN}}} \text{ m}$$

- $\sigma_{AB} = \sigma_{CD} \Leftrightarrow \frac{F_2 - F_1 - F_3}{a^2} = \frac{-F_3}{a^2}$
 $\Leftrightarrow \frac{F_2 - F_1 - F_3}{a^2} = \frac{-F_3}{a^2}$
 $\Leftrightarrow F_2 - F_1 = 0$
 $\Leftrightarrow F_2 = F_1 = 1 \text{ kN}$

- $\sigma_{BC} = \sigma_{CD} \Leftrightarrow \frac{F_2 - F_3}{a^2 - b^2} = \frac{-F_3}{a^2}$
 $\Leftrightarrow a^2(F_2 - F_3) = b^2F_3 - a^2F_3$
 $\Leftrightarrow a^2F_2 - a^2F_3 = b^2F_3 - a^2F_3$
 $\Leftrightarrow a^2F_2 = b^2F_3$
 $\Leftrightarrow b^2 = a^2 \frac{F_2}{F_3}$

$$b = a \sqrt{\frac{F_2}{F_3}} = a \sqrt{\frac{F_1}{F_3}} \text{ since } F_2 = F_1$$

$$b = 10 * 10^{-2} * \sqrt{\frac{1 \text{ kN}}{4 \text{ kN}}} \text{ m} = 10 * 10^{-2} * \frac{1}{2} = 5 * 10^{-2} \text{ m}$$

Not needed but we can also verify that $b = a \sqrt{\frac{F_1}{-F_2 + F_1 + F_3}} = a \sqrt{\frac{F_2}{F_3}}$, we get:

$$\Leftrightarrow \frac{F_1}{-F_2 + F_1 + F_3} = \frac{F_2}{F_3}$$

$$\Leftrightarrow F_1F_3 = -F_2^2 + F_1F_2 + F_3F_2, \text{ which is true for } F_1 = F_2$$

e) [2 points]: Lorsque la contrainte est la même dans toute la barre, l'énergie de déformation relative est-elle la même dans tous les segments ? Justifier votre réponse.

Method 1:

The strain energy density is defined as:

$$U_0 = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

The strain energy is therefore:

$$U = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon V = \frac{\sigma^2}{2E} V$$

When $\sigma_{AB} = \sigma_{BC} = \sigma_{CD}$, we have:

$$U_{AB} = \frac{\sigma_{AB}^2}{2E} V_{AB}; U_{BC} = \frac{\sigma_{AB}^2}{2E} V_{BC} \text{ and } U_{CD} = \frac{\sigma_{AB}^2}{2E} V_{CD}$$

Because of the cavity in the beam, we have: $V_{AB} = V_{CD} \neq V_{BC}$

Therefore, the strain energy is not the same in all segments.

Method 2:

We can also use: $U = \frac{N^2 L}{2EA}$

$$N_{AB} = F_2 - F_1 - F_3 = -F_3 = -4000 \text{ N}$$

$$N_{BC} = F_2 - F_3 = 1000 - 4000 = 3000 \text{ N}$$

$$N_{CD} = -F_3 = -4000 \text{ N}$$

And

$$U_{AB} = \frac{N_{AB}^2 L_{AB}}{2E A_{AB}}$$

$$\frac{U_{AB}}{U_{BC}} = \frac{\frac{N_{AB}^2 L_{AB}}{2E A_{AB}}}{\frac{N_{BC}^2 L_{BC}}{2E A_{BC}}} = \frac{\frac{N_{AB}^2}{A_{AB}}}{\frac{N_{BC}^2}{A_{BC}}}$$

We have

$$\frac{N_{AB}^2}{A_{AB}} = \frac{(-4000)^2}{(10 * 10^{-2})^2} = 1.6 * 10^9 \text{ N}^2 \cdot \text{m}^{-2}$$

$$\frac{N_{BC}^2}{A_{BC}} = \frac{(-3000)^2}{(10 * 10^{-2})^2 - (5 * 10^{-2})^2} = 1.2 * 10^9 \text{ N}^2 \cdot \text{m}^{-2} \neq \frac{N_{AB}^2}{A_{AB}}$$

Finally, we conclude that $U_{AB} \neq U_{BC}$

QUESTION 2 (Q2) – Barre en Torsion**(9 points)**

Une poutre métallique cylindrique fixée à une extrémité est sous l'influence de deux couples. Au point B un couple \vec{T}_B de **2462 [N * m]** est appliquée dans la direction donnée à la **Figure 2** et un couple \vec{T}_C est appliqué au point C. Ce couple \vec{T}_C induit à lui seul un angle de torsion de **+3 degrés** à l'extrémité du segment BC (**voir Figure 2**).

Le segment AB de la poutre est plein tandis que le segment BC est constitué de deux barres composées de deux matériaux différents (**voir Figure 2 et porter attention aux vues en coupe**). Les deux barres du segment BC ont leurs extrémités liées et subissent donc la même rotation.

La masse des barres est négligeable et la poutre a les propriétés suivantes :

$$G_1 = 300 \text{ GPa}, G_2 = 100 \text{ GPa}, L = 1 \text{ [m]}, r = 1 \text{ [cm]} R = 2 \text{ [cm]}$$

L'espace entre les deux barres du segment BC est de 0.5 cm.

- [1 point] Dessiner le diagramme des corps libres et donner l'équation d'équilibre.
- [4 points] Déterminer la valeur numérique de la contrainte de cisaillement maximale dans la poutre en comparant les contraintes dans les différentes parties de la poutre.
- [2 points] Pour chacun des segments, à $L/2$ pour AB et à $3L/2$ pour BC, tracer le graphique de la contrainte de cisaillement en fonction du rayon de la barre.
- [2 points] Dessiner le graphique, ϕ en fonction de x , qui représente l'évolution de l'angle de torsion le long de la barre, du point A au point C. Indiquer les valeurs numériques de l'angle de torsion en degrés aux points A, B, et C.

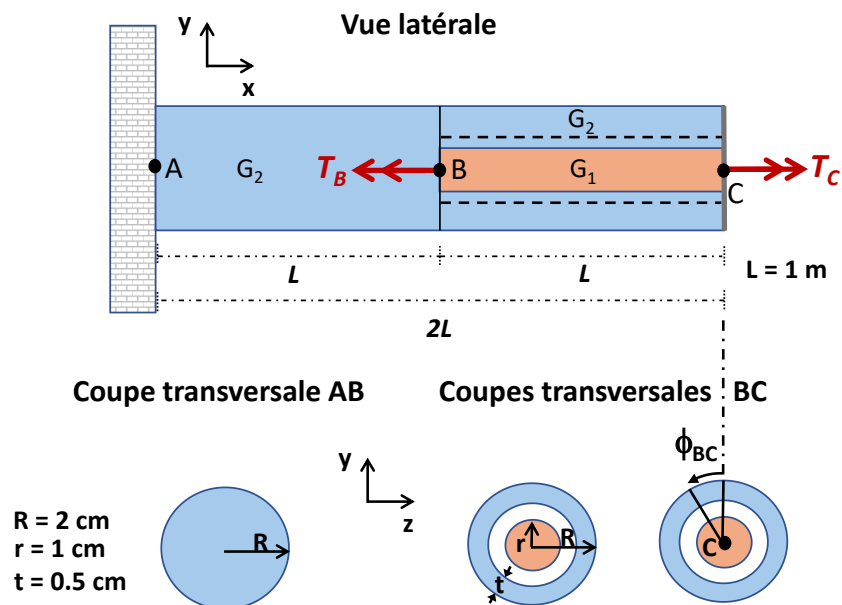
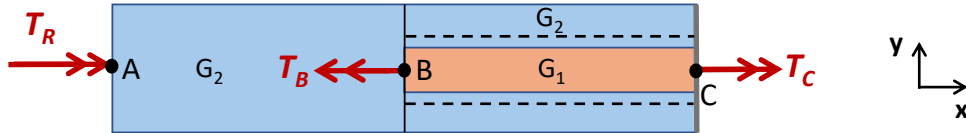


Figure 2: Barre cylindrique encastée à une extrémité et en torsion sous la charge de 2 couples ; vue latérale et coupes transversales (dessin pas à l'échelle).

e) [1 point] Dessiner le diagramme des corps libres et donner l'équation d'équilibre.



$$\vec{T}_C - \vec{T}_B + \vec{T}_R = 0$$

f) [4 points] Déterminer la contrainte de cisaillement maximale dans cette structure. Donner une valeur numérique.

Il faut comparer la contrainte de cisaillement maximale dans les segments \$AB\$ et \$BC\$.

Calculons les moments polaires d'inertie :

$$\text{Pour le segment } AB : I_{p2AB} = \frac{\pi(2R)^4}{32} = 2.5133 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$\text{Pour le segment } BC : I_{p1BC} = \frac{\pi(2r)^4}{32} = 1.5708 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$I_{p2BC} = \frac{\pi(2R)^4}{32} - \frac{\pi(2(r+0.005))^4}{32} = 1.7181 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

Dans le segment \$BC\$ et dans le matériau \$G_1\$

$$\tau_{max BC G1} = \frac{G_1 \Phi r}{L} = \frac{G_1 * 0.0523599 \text{ rad} * 0.01 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 157.1 \text{ MPa}$$

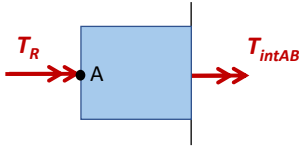
Dans le segment \$BC\$ et dans le matériau \$G_2\$

$$\tau_{max BC G2} = \frac{G_2 \Phi R}{L} = \frac{G_2 * 0.0523599 \text{ rad} * 0.02}{1 \text{ m}} = 104.7 \text{ MPa}$$

Dans le segment \$AB\$:

On peut exprimer \$T_{AB}\$ en combinant méthode des sections et équation d'équilibre:

$$T_{intAB} = -T_R = T_C - T_B$$



$$T_C = T_{intBC} = k_{eq} \Phi \text{ avec } k_{eq} = \frac{G_1 I_{p1BC}}{L} + \frac{G_2 I_{p2BC}}{L} \text{ et } \Phi = 0.05236 \text{ rad}$$

$$T_C = 1146 \text{ Nm}$$

$$T_{intAB} = T_C - T_B = 1146 - 2462 \text{ Nm} = -1316 \text{ Nm}$$

$$\tau_{max AB} = \frac{T_{intAB} R}{I_p} = \frac{32 T_{intAB} R}{\pi (2R)^4} = \frac{32 \times -1316 \times 0.02}{\pi (0.04)^4} = -104.7 \text{ MPa}$$

La contrainte maximale dans la barre est dans le segment BC : $\tau_{max} = 157 \text{ MPa}$

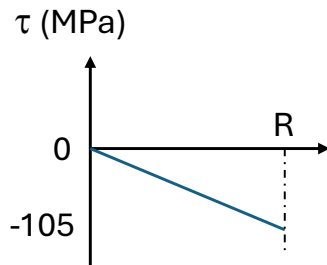
- g) [2 points] Pour chacun des segments, à $L/2$ pour AB et à $3L/2$ pour BC, tracer le graphique de la contrainte de cisaillement le long du rayon de la barre, du centre de la barre à son extrémité R.

$$\tau_{min AB G2} = 0 \text{ MPa}, \quad \tau_{max AB} = -105 \text{ MPa}$$

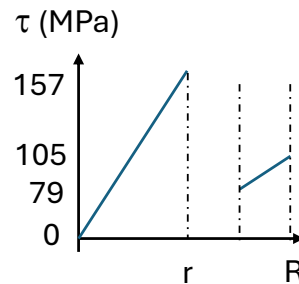
$$\tau_{min BC G1} = 0 \text{ MPa}, \quad \tau_{max BC G1} = 157 \text{ MPa}$$

$$\tau_{min BC G2} = \frac{G_2 \Phi (r + 0.005)}{L} = 78.5 \text{ MPa}, \quad \tau_{max BC G2} = 105 \text{ MPa}$$

Pour le segment AB



Pour le segment BC



- h) [2 points] Dessiner le graphique, ϕ en fonction de x, qui représente l'évolution de l'angle de torsion le long de la barre, du point A au point C. Indiquer les valeurs numériques de l'angle de torsion en degrés aux points A, B, et C.

Angle de torsion au point A est de 0 degré

Angle de torsion au point B:

$$\phi_{AB} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{G_2 I_{p_{AB}}} = \frac{-1316 \times 1}{100 \times 10^9 \frac{\pi}{32} [(0.04)^4]} = -0.05236 \text{ rad} = -3 \text{ degrés}$$

Angle de torsion au point C est la somme des angles du segment AB et du segment BC

$$\text{Angle de torsion au point C} = \phi_{AB} + \phi_{BC} = -3 \text{ degrés} + 3 \text{ degrés} = 0 \text{ degrés}$$

Le graphique représentant l'angle de rotation le long de la structure du point A au point C est le suivant:

